КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра обчислювальної математики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана з навчальної роботи
фізичного факультету
_______________ Оксана МОМОТ
«____» _______________ 20*22* р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

для студентів

Галузь знань	**10 Природничі науки**
Спеціальність	**104 Фізика та астрономія**
Освітня програма	**Фізичне матеріалознавство/Неметалічне матеріалознавство**
Освітній рівень	**бакалавр**
Форма навчання	**денна**
Мова викладання, навчання та оцінювання	**українська**
Вид дисципліни	**обов'язкова навчальна дисципліна** *ОК 1.4*

Навчальний рік	**2022 / 2023**
Семестр	**1**
Кількість кредитів ECTS	**8**
Форма заключного контролю	**іспит**
Семестр	**2**
Кількість кредитів ECTS	**6**
Форма заключного контролю	**іспит**

Викладачі: Майко Н. В., Бєлих С. П.

Пролонговано: на 2023/2024 н. р. __________ (_____________) «___» ________ 20__ р.
на 2024/2025 н. р. __________ (_____________) «___» ________ 20__ р.
(підпис, ПІБ, дата)

КИЇВ – 2022

Розробник:
Майко Наталія Валентинівна, доцент, доктор фізико-математичних наук, доцент

Гарант ОПП Фізичне матеріалознавство/Неметалічне матеріалознавство:
Оліх Олег Ярославович, професор, доктор фізико-математичних наук, професор

Декан фізичного факультету _______________ Микола МАКАРЕЦЬ

«02» червня 20 22 року «___» _________ 20___ року

Схвалено науково-методичною комісією фізичного факультету

протокол № 11 від «10» червня 20 22 року

Голова науково-методичної комісії _______________ Олег ОЛІХ

Завідувач кафедри обчислювальної математики _______________ Сергій ЛЯШКО

«10» червня 20 22 року «___» _________ 20___ року

1. АНОТАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Дисципліна "Математичний аналіз" є нормативною навчальною дисципліною математичного циклу. Програмою дисципліни в 1-му семестрі передбачено вивчення теорії границь, неперервності, диференціального та інтегрального числення функцій скалярного аргументу (ФСА). Програмою дисципліни в 2-му семестрі передбачено вивчення диференціального та інтегрального числення функцій векторного аргументу (ФВА), криволінійних та поверхневих інтегралів 1-го і 2-го родів, елементів математичної теорії поля.

2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Ознайомлення студентів з основними теоретичними положеннями, методами та прикладами застосувань математичного аналізу для розв’язування фізичних задач.

3. ЗАВДАННЯ ТА ЦІЛІ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

– викласти основні теоретичні відомості, методи і приклади розв'язання задач математичного аналізу;
– продемонструвати зв'язок математичного аналізу з іншими навчальними дисциплінами;
– ознайомити з обов'язковою та додатковою навчальною літературою;
– допомогти студентам засвоїти необхідні теоретичні знання та набути практичні уміння й навички для розв'язання фізичних задач методами математичного аналізу;
– сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів;
– прищеплювати навички колективної роботи та сприяти застосуванню набутого комунікативного досвіду у професійній діяльності;
– підтримувати високий рівень мотивації та сприяти вдосконаленню навичок самостійної роботи;
– забезпечити належний рівень підготовки до вивчення всіх дисциплін математичного і фізичного циклів.

4. ПОПЕРЕДНІ ВИМОГИ ДО ОПАНУВАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

На початку 1-го семестру – успішне засвоєння курсу елементарної математики;
на початку 2-го семестру – успішне засвоєння курсів "Математичний аналіз" та "Аналітична геометрія та лінійна алгебра" в 1-му семестрі.

5. РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ

Результат навчання (1 – знання; 2 – вміння; 3 – комунікація; 4 – автономність і відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
1	Студент повинен **знати**:	Лекції, практичні заняття, консультації, самостійна робота	Відвідування лекцій, робота на практичних заняттях, виконання домашніх завдань, розв'язання індивідуальних	до 35%

			варіантів самостійних робіт, виконання письмових модульних контрольних робіт, написання колоквіумів, складання іспитів	
1.1	основні поняття, результати та методи диференціального та інтегрального числень функцій скалярного аргументу (границя, неперервність, диференційовність, інтегровність)			
1.2	основні поняття, результати та методи диференціального та інтегрального числень функцій векторного аргументу (границя, неперервність, диференційовність, інтегровність)			
2	Студент повинен **уміти**:	Практичні заняття, консультації, самостійна робота	Робота на практичних заняттях, виконання домашніх завдань, розв'язання індивідуальних варіантів самостійних робіт, виконання письмових модульних контрольних робіт, написання колоквіумів, складання іспитів	до 55%
2.1	застосовувати основні поняття та методи диференціального числення до розв’язування фізичних задач			
2.2	застосовувати основні поняття та методи інтегрального числення до розв’язування фізичних задач			
3	**Комунікація**	Лекції, практичні заняття, консультації	Робота на практичних заняттях, виконання домашніх завдань, розв'язання індивідуальних варіантів самостійних робіт	до 5%
3.1	набувати досвід колективної роботи та вдосконалювати набуті комунікативні навички у професійній діяльності			
4	**Автономність та відповідальність**	Практичні заняття, самостійна робота	Виконання письмових модульних контрольних робіт, виконання домашніх завдань, розв'язання індивідуальних варіантів самостійних робіт, написання колоквіумів, складання іспитів	до 5%
4.1	здатність самостійно та вчасно виконувати завдання, розв’язувати практичні задачі та відповідати за результати своєї діяльності			

6. СПІВВІДНОШЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІНИ З ПРОГРАМНИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ НАВЧАННЯ (ПРН)

Результати навчання дисципліни (код) / **Програмні результати навчання (назва)**	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	4.1
ПРН1. Знати, розуміти та вміти застосовувати основні положення загальної та теоретичної фізики, зокрема, класичної, релятивістської та квантової механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електромагнетизму, хвильової та квантової оптики, фізики атома та атомного ядра для встановлення, аналізу, тлумачення, пояснення й класифікації суті та механізмів різноманітних фізичних явищ і процесів для розв'язування складних спеціалізованих задач та практичних проблем з фізики.	+	+	+	+		
ПРН3. Знати і розуміти експериментальні основи фізики: аналізувати, описувати, тлумачити та пояснювати основні експериментальні підтвердження існуючих фізичних теорій.	+	+	+	+		
ПРН11. Вміти упорядковувати, тлумачити та узагальнювати одержані наукові та практичні результати, робити висновки.	+	+	+	+		
ПРН17. Знати і розуміти роль і місце фізики, астрономії та інших природничих наук у загальній системі знань про природу та суспільство, у розвитку техніки й технологій та у формуванні сучасного наукового світогляду.	+	+	+	+	+	+
ПРН25. Мати навички самостійного прийняття рішень стосовно своїх освітніх траєкторій та професійного розвитку.					+	+
ПРН28. Розуміти міждисциплінарні шляхи розвитку науки та мати навички міждисциплінарних матеріалознавчих досліджень.	+	+	+	+	+	+

Програмні компетентності дисципліни

Загальні компетентності (ЗК)	
ЗК1	Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
ЗК2	Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
ЗК3	Навички використання інформаційних і комунікаційних технологій.
ЗК4	Здатність бути критичним і самокритичним.
ЗК12	Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.
ЗК13	Здатність спілкуватися іноземною мовою.
Фахові компетентності (ФК)	
ФК1	Знання і розуміння теоретичного та експериментального базису сучасної фізики та астрономії.
ФК2	Здатність використовувати на практиці базові знання з математики як математичного апарату фізики і астрономії при вивченні та дослідженні фізичних та астрономічних явищ і процесів.
ФК3	Здатність оцінювати порядок величин у різних дослідженнях, так само як точності та значимості результатів.
ФК5	Здатність виконувати обчислювальні експерименти, використовувати чисельні методи для розв'язування фізичних та астрономічних задач і моделювання фізичних систем.
ФК7	Здатність використовувати базові знання з фізики та астрономії для розуміння будови та поведінки природних і штучних об'єктів, законів існування та еволюції Всесвіту.
ФК9	Здатність працювати з джерелами навчальної та наукової інформації.
ФК10	Здатність самостійно навчатися і опановувати нові знання з фізики, астрономії та суміжних галузей.

ФК13	Орієнтація на найвищі наукові стандарти – обізнаність щодо фундаментальних відкриттів та теорій, які суттєво вплинули на розвиток фізики, астрономії та інших природничих наук.
ФК15	Здатність аналізувати світові тенденції розвитку фізики для вибору власної освітньої траєкторії.

7. СХЕМА ФОРМУВАННЯ ОЦІНКИ

7.1. Форми оцінювання студентів

Рівень досягнення всіх запланованих результатів навчання визначається за результатами письмових модульних контрольних робіт і колоквіумів та результатами виконання домашніх та індивідуальних самостійних завдань.

Семестрове оцінювання

Матеріал кожного навчального семестру поданий у вигляді трьох змістових модулів:

1-й семестр: ЗМ-1–ЗМ-4,

2-й семестр: ЗМ-5–ЗМ-9.

Після вивчення кожного змістового модуля передбачено проведення письмової модульної контрольної роботи (перевіряє викладач, який веде практичні заняття). Упродовж семестру студент повинен виконувати домашні та індивідуальні самостійні завдання (перевіряє викладач, який веде практичні заняття). У середині семестру з метою підготовки до іспиту проводяться колоквіуми (перевіряє лектор) у формі письмової роботи з теоретичними питаннями і практичними завданнями.

У випадку відсутності студента з поважних причин написання модульних контрольних робіт і колоквіумів здійснюються відповідно до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 р.

Підсумкове оцінювання (у формі іспиту)

Форма іспиту в кожному семестрі – письмово-усна. Письмова складова іспиту є обов'язковою і проводиться у вигляді письмової роботи (з теоретичними питаннями та практичними завданнями в екзаменаційному білеті). Усна складова іспиту є необов'язковою і проводиться у вигляді обговорення письмової складової.

Умови допуску до підсумкового оцінювання

Умовою допуску до іспиту є отримання студентом не менше 36 балів за змістові модулі та колоквіум (якщо він передбачений цією робочою програмою). Мінімальна кількість балів за змістові модулі – 29 (оцінює викладач з практичних занять); мінімальна кількість балів за колоквіум – 7 (оцінює лектор):

1-й семестр: допуск до іспиту – 36 балів за ЗМ-1–ЗМ-4,

2-й семестр: допуск до іспиту – 29 балів за ЗМ-5–ЗМ-9 та 7 балів за колоквіум,

Студенти, які набрали меншу суму балів, зобов'язані виконати додаткову письмову контрольну роботу за матеріалом змістових модулів (перевіряє викладач, який веде практичні заняття) та виконати додаткові завдання за матеріалом колоквіуму (перевіряє лектор).

7.2. Організація оцінювання

Орієнтовний графік оцінювання

Семестр 1

ЗМ-1	жовтень
ЗМ-2	листопад
ЗМ-3	грудень
Колоквіум-1	кінець жовтня–початок листопада
Додаткова КР-1	грудень
Іспит-1	грудень

Семестр 2

ЗМ-4	березень
ЗМ-5	квітень
ЗМ-6	травень
Колоквіум-2	початок квітня
Додаткова КР-2	травень
Іспит-2	червень

Розрахунок балів за форми контролю

Семестр 1

	ЗМ-1	ЗМ-2	ЗМ-3	Колоквіум-1	Іспит-1	Підсумкова оцінка
Бали (max)	20	20	20	–	40	100

Семестр 2

	ЗМ-4	ЗМ-5	ЗМ-6	Колоквіум-2	Іспит-2	Підсумкова оцінка
Бали (max)	16	16	16	12	40	100

7.3. Шкала відповідності оцінок

Оцінка (за національною шкалою)/ National grade	Рівень досягнень, % / Marks, %
Відмінно/Excellent	90–100%
Добре/Good	75–89%
Задовільно/Satisfactory	60–74%
Незадовільно/Failed	0–59%

8. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ

Семестр 1

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
Змістовий модуль 1. **Вступ до аналізу. Границя і неперервність**				

функції скалярного аргументу (ФСА)				
1	Вступ	6	4	6
2	Границя числової послідовності	4	6	8
3	Границя ФСА	4	4	8
4	Неперервність ФСА	2	2	5
Модульна контрольна робота № 1			2	2
Всього за змістовий модуль 1		**16**	**18**	**29**
Змістовий модуль 2. **Диференціальне числення ФСА**				
5	Похідні та диференціали	6	4	10
6	Теореми про середнє значення	4	4	8
7	Застосування методів диференціального числення	4	4	8
Модульна контрольна робота № 2			2	4
Всього за змістовий модуль 2		**14**	**14**	**30**
Змістовий модуль 3. **Інтегральне числення СФСА**				
8	Невизначений інтеграл	6	6	8
9	Інтеграл Рімана	4	2	6
10	Застосування визначеного інтеграла	2	2	6
11	Невласні інтеграли	2	2	8
Модульна контрольна робота № 3			2	2
Всього за змістовий модуль 3		**14**	**14**	**30**
Змістовий модуль 4. **Диференціальне числення функцій векторного аргументу (ФВА)**				
12	Метричний, векторний нормований та евклідів простори	4		6
13	Границя і неперервність ФВА	4	2	6
14	Диференціал і частинні похідні	4	6	8
15	Екстремуми ФВА	4	4	6
Модульна контрольна робота № 4			2	4
Всього за змістовий модуль 4		**16**	**14**	**30**
Всього за семестр 1		**60**	**60**	**119**

Семестр 2

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
Змістовий модуль 5. **Інтегральне числення ФВА**				
1	Міра Жордана. Кратний інтеграл Рімана	2		4
2	Теорема Фубіні про зведення кратного інтеграла до повторного	2	4	4
3	Формула заміни змінних у кратному інтегралі	2	4	4
4	Приклади застосування подвійних і потрійних інтегралів	2	4	4
5	Невласні кратні інтеграли			4
Модульна контрольна робота № 5			2	1
Всього за змістовий модуль 5		**8**	**14**	**21**
Змістовий модуль 6. **Інтеграли на многовидах. Елементи математичної теорії поля**				
6	Криволінійний і поверхневий інтеграли 1-го роду	2	4	5

7	Криволінійний і поверхневий інтеграли 2-го роду	2	4	5
8	Інтегральні теореми Гріна, Гаусса–Остроградського, Стокса	2	4	6
9	Диференціальні операції теорії поля. Набла-символіка	2	2	4
Модульна контрольна робота № 6			2	2
Всього за змістовий модуль 6		**8**	**16**	**22**
Змістовий модуль 7. **Числові ряди. Сімейства і ряди функцій**				
10	Числові ряди	2	4	5
11	Сімейства і ряди функцій	2	2	5
12	Степеневі ряди. Ряд Тейлора	2	2	5
Модульна контрольна робота № 7			2	3
Всього за змістовий модуль 7		**6**	**10**	**18**
Змістовий модуль 8. **Інтеграли, залежні від параметра**				
13	Власні інтеграли, залежні від параметра	2	2	4
14	Невласні інтеграли, залежні від параметра	2	4	6
15	Класичні невласні інтеграли. Ейлерові інтеграли		4	4
Модульна контрольна робота № 8			2	2
Всього за змістовий модуль 8		**4**	**12**	**16**
Змістовий модуль 9. **Аналіз Фур'є**				
16	Тригонометричний ряд Фур'є	2	4	6
17	Інтеграл Фур'є	2	2	4
18	Ряди Фур'є в евклідовому просторі			2
Модульна контрольна робота № 9			2	
Всього за змістовий модуль 9		**4**	**8**	**12**
Всього за семестр 2		**30**	**60**	**89**
Всього за навчальний рік		**90**	**120**	**208**

Семестр 1

Загальний обсяг – 240 год., в тому числі:

лекції – 60 год.,
практичні заняття – 60 год.,
самостійна робота – 119 год.,
консультації – 1 год.

Форма заключного контролю – іспит.

Семестр 2

Загальний обсяг – 180 год., в тому числі:

лекції – 30 год.,
практичні заняття – 60 год.,
самостійна робота – 89 год.,
консультації – 1 год.

Форма заключного контролю – іспит.

Семестр 1

Змістовий модуль 1. **Вступ до аналізу. Границя і неперервність СФСА**

Лекція 1–3. Дійсні числа

Символи математичної логіки. Елементи теорії множин. Класифікація відображень. Означення і властивості множини дійсних чисел $\mathbf{R}$. Потужність множини. Комплексні числа.

Лекція 4. Границя числової послідовності

Означення і властивості збіжних послідовностей. Алгебричні операції зі збіжними послідовностями. Граничний перехід у нерівностях. Деякі важливі границі.

Лекція 5. Монотонні послідовності. Підпослідовності

Означення і приклади монотонних послідовностей. Теорема Вейєрштрасса. Число e. Означення підпослідовності і частинної границі. Означення і властивості верхньої і нижньої границь. Теорема Больцано – Вейєрштрасса. Критерій Коші.

Лекція 6. Границя СФСА

Означення Коші і Гейне границі функції в точці. Нескінченна границя. Границя в нескінченній точці. Граничний перехід у рівностях і нерівностях. Односторонні границі. Критерій Коші. Границя композиції функцій. Визначні границі.

Лекція 7. Порівняння асимптотичної поведінки функцій

Означення і властивості символів Ландау $(o, O, O^*, \sim)$. П’ять асимптотичних формул.

Лекція 8. Властивості неперервних функцій

Локальні властивості неперервних функції. Класифікація точок розриву. Глобальні властивості неперервних функцій. Рівномірна неперервність.

Змістовий модуль 2. **Диференціальне числення СФСА**

Лекція 9. Похідна

Означення похідної, її механічний смисл. Геометричний смисл похідної. Похідна суми, добутку і частки функцій. Похідна композиції функцій. Таблиця похідних.

Лекція 10, 11. Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків

Диференційовність функції в точці. Означення і властивості диференціала, його геометричний смисл.. Формула Лейбніца. Похідна оберненої та параметрично заданої функцій.

Лекція 12. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа про скінченний приріст. Теорема Коші. Правило Лопіталя.

Лекція 13. Формула Тейлора

Поліном Тейлора. Види залишкового члена формули Тейлора. Локальна формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано. П’ять формул Маклорена для основних елементарних функцій. Приклади застосування.

Лекція 14. Дослідження функції на монотонність

Умови монотонності функції. Необхідна і достотні умови локального екстремуму. Найбільше і найменше значення.

Лекція 15. Дослідження функції на опуклість. Асимптоти. Графіки

Умови опуклості. Необхідна і достатні умови точки перегину. Асимптоти графіка функції. Схема дослідження функції та побудова її графіка.

Змістовий модуль 3. **Інтегральне числення СФСА**

Лекція 16. Первісна

Означення первісної. Означення і властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів. Інтегрування частинами. Формула заміни змінних. Формула Ньютона–Лейбніца.

Лекція 17. Інтегрування раціональних дробів

Теорема про розклад раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів.

Лекція 18. Інтегрування ірраціональних і тригонометричних функцій

Методи інтегрування ірраціональних функцій. Методи інтегрування деяких тригонометричних виразів. Інтеграли, які не беруться.

Лекція 19. Означення інтеграла Рімана та класи інтегровних функцій

Інтегральна сума Рімана. Інтеграл Рімана. Необхідна умова інтегровності. Верхні і нижні суми Дарбу. Верхній і нижній інтеграли Дарбу. Критерій Дарбу. Інтегровність неперервної функції. Інтегровність монотонної функції. Критерій Лебега. Властивості інтеграла. Теореми про середнє.

Лекція 20. Основна теорема інтегрального числення

Інтеграл зі змінною верхньою межею. Основна теорема інтегрального числення. Формула Ньютона – Лейбніца. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Заміна змінних. Інтегральна форма залишкового члена формули Тейлора.

Лекція 21. Геометричні і фізичні застосування

Спрям(люва)ність кривої. Обчислення довжини кривої. Квадровність. Площа криволінійної трапеції. Площа криволінійного сектора. Кубовність. Об'єм тіла з відомим поперечним перерізом. Об'єм тіла обертання. Обчислення моментів.

Лекція 22. Невласні інтеграли

Означення і властивості невласних інтегралів 1-го і 2-го роду. Критерій Коші збіжності. Інтеграли від знакосталих функцій. Ознаки Діріхле і Абеля. Абсолютна збіжність. Головне значення в розумінні Коші.

Змістовий модуль 4. **Диференціальне числення ФВА**

Лекція 23. Метричний, векторний нормований та евклідів простори

Аксіоми метрики. Приклади метричних просторів. Точки і множини в метричному просторі. Лема про об'єднання і перетин відкритих множин. Метричні компакти. Послідовності елементів метричного простору. Повний метричний простір. Аксіоми норми. Метризовність векторного нормованого простору. Скалярний добуток. Евклідів простір. Нерівність Коші–Буняковського–Шварца.

Лекція 24. Принцип нерухомої точки Пікара–Банаха

Границя і неперервність відображень. Означення стискаючого відображення. Принцип нерухомої точки Пікара–Банаха. Послідовності в $\mathbf{R}^m$ $(m > 1)$.

Лекція 25, 26. Границя і неперервність ФВА.

Лекція 27. Властивості диференційовних ФВА

Частинні похідні ФВА в точці. Диференційовність та диференціал функції в точці. Матриця Остроградського–Якобі. Якобіан. Градієнт функції в точці. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Основні правила диференціювання. Формула Тейлора.

Лекція 28. Неявно задані відображення. Заміна змінних

Теорема про існування неперервність і диференційовність неявно заданого відображення. Теорема про обернену функцію. Залежність функцій. Заміна змінних у виразах зі звичайними і частинними похідними.

Лекція 29, 30. Екстремуми ФВА

Дослідження ФВА на внутрішній локальний екстремум. Означення і необхідна умова внутрішнього локального екстремуму. Достатні умови. Критерій Сильвестра. Поняття умовного екстремуму. Метод виключення. Метод невизначених множників Лагранжа. Достатня умова. Найбільше і найменше значення.

Семестр 2

Змістовий модуль 5. **Інтегральне числення ФВА**

Лекція 1. Означення і властивості інтеграла

Інтеграл Рімана на брусі. Необхідна умова інтегровності. Нижні та верхні інтегральні суми Дарбу. Нижній та верхній інтеграли Дарбу. Критерій Дарбу. Означення і приклади жорданових множин. Означення і властивості інтеграла Рімана. Критерій Лебега. Міра Жордана.

Лекція 2. Зведення кратного інтеграла до повторного

Теорема Фубіні про зведення кратного інтеграла до повторного. Приклади обчислення подвійного та потрійного інтегралів.

Лекція 3. Формула заміни змінних

Формула заміни змінних у кратних інтегралах. Геометричний смисл якобіана заміни. Полярні координати. Циліндричні та сферичні координати. Обчислення інтеграла Ейлера–Пуассона.

Лекція 4. Геометричні і фізичні застосування кратних інтегралів

Обчислення площ і об’ємів. Обчислення моментів і координат центру мас. Дослідження на збіжність і обчислення невласних кратних інтегралів.

Змістовий модуль 6. **Інтеграли на многовидах. Елементи математичної теорії поля**

Лекція 5. Криволінійні і поверхневі інтеграли 1-го роду

Гладка крива в $\mathbf{R}^m$. Криволінійний інтеграл 1-го роду. Гладка поверхня в $\mathbf{R}^3$. Поверхневий інтеграл 1-го роду.

Лекція 6. Криволінійні та поверхневі інтеграли 2-го роду

Орієнтація кривої в евклідовому просторі $\mathbf{R}^m$ неперервним полем дотичних векторів. Криволінійний інтеграл 2-го роду. Орієнтація поверхні в $\mathbf{R}^3$ неперервним полем нормальних векторів. Поверхневий інтеграл 2-го роду.

Лекція 7. Основні інтегральні формули аналізу

Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від вибору шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів. Формула Гріна. Формула Гаусса–Остроградського. Формула Стокса в $\mathbf{R}^3$.

Лекція 8. Скалярні та векторні поля. Набла-символіка

Типи скалярних полів. Векторні лінії і векторні трубки. Градієнт скалярного поля в точці. Похідна скалярного поля в точці в напрямі вектора. Диференціальний оператор grad. Потік і дивергенція векторного поля. Диференціальний оператор div. Циркуляція і робота векторного поля. Диференціальний оператор rot. Соленоїдне векторне поле і його векторний потенціал. Закон збереження інтенсивності векторної трубки. Потенціальне поле і його потенціал. Диференціально-векторний оператор Гамільтона ∇. Диференціальні операції другого порядку. Оператор Лапласа Δ. Гармонічне скалярне поле. Векторні операції в ортогональних координатах.

Змістовий модуль 7. **Числові ряди. Сімейства і ряди функцій**

Лекція 9. Числові ряди

Основні означення і приклади числових рядів. Властивості збіжних рядів. Збіжність згрупованого ряду. Критерій Коші. Збіжність знакосталих рядів. Ознаки збіжності знакосталих рядів. Збіжність довільних рядів. Ознака Лейбніца збіжності знакопочережного ряду. Ознака Діріхле. Ознака Абеля. Абсолютна і умовна збіжність. Комутативна властивість абсолютно збіжного ряду. Теорема Рімана. Множення числових рядів. Добуток рядів у розумінні Коші. Комплексний числовий ряд.

Лекція 10. Сімейства функцій і ряди функцій

Збіжність і рівномірна збіжність сімейства функцій і ряду функцій. Критерій Коші. Ознаки Даламбера та коренева Коші рівномірної збіжності функціонального ряду. Мажорантна ознака Вейєрштрасса. Ознака Діріхле. Ознака Абеля. Застосування рівномірної збіжності. Функціональні властивості граничної функції сім'ї функцій та суми ряду функцій.

Лекція 11. Степеневі ряди

Означення і приклади степеневих рядів. Формула Коші–Адамара. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду. Рівномірна збіжність. Дві теореми Абеля. Функціональні властивості суми степеневого ряду. Зображення функції степеневим рядом. Означення ряду Тейлора функції в точці. Необхідна умова зображуваності функції степеневим рядом. Необхідна і достатня умова. П'ять основних розкладів.

Змістовий модуль 8. **Інтеграли, залежні від параметра**

Лекція 12. Власні інтеграли, залежні від параметра

Граничний перехід під знаком власного інтеграла, залежного від параметра. Неперервність, інтегровність і диференційовність власного інтеграла, залежного від параметра.

Лекція 13. Невласні інтеграли, залежні від параметра

Означення рівномірної збіжності. Критерій Коші. Мажорантна ознака Вейєрштрасса. Ознаки Діріхле і Абеля. Функціональні властивості невласного інтеграла, залежного від параметра. Граничний перехід під знаком невласного інтеграла, залежного від параметра. Неперервність, інтегровність і диференційовність невласного інтеграла, залежного від параметра. Класичні невласні інтеграли: Діріхле, Ейлера–Пуассона, Лапласа, Френеля, Фруллані. Інтеграли Ейлера 1-го і 2-го роду. Бета- і гамма-функції Ейлера.

Змістовий модуль 9. **Аналіз Фур'є**

Лекція 14. Тригонометричний ряд Фур'є

Означення ТРФ. Умова Діні і точкова збіжність ТРФ. Важливі окремі випадки ТРФ. Комплексна форма запису ТРФ. Кратний ТРФ. Рівномірна збіжність ТРФ. Функціональні властивості суми ТРФ. Почленне інтегрування та диференціювання ТРФ. Суми Фейєра. Апроксимаційні теореми Вейєрштраса.

Лекція 15. Інтеграл Фур'є.

Збіжність інтеграла Фур'є в точці. Інтегральна формула Фур'є для парних і непарних функцій. Комплексна форма запису інтегральної формули Фур'є. Перетворення Фур'є. Означення і властивості перетворення Фур'є. Приклади застосувань.

Лекція 16 (факультативно). Загальний ряд Фур'є

Лінійно незалежні, ортогональні і ортонормовані системи елементів евклідового простору. Коефіцієнти Фур'є. Ряд Фур'є. Екстремальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Збіжність ряду Фур'є. Замкнуті та повні ортогональні системи. Повнота основної тригонометричної системи. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.

9. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Семестр 1

Змістовий модуль 1. **Вступ до аналізу. Границя і неперервність ФСА**

Практичне заняття 1

Контрольна робота з елементарної математики.

Метод математичної індукції. Формула бінома Ньютона.

Практичне заняття 2

Елементарні функції та їх графічне зображення. Таблиця похідних. Основні правила диференціювання. Таблиця невизначених інтегралів. Формула Ньютона–Лейбніца.

Практичне заняття 3

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Формули Ейлера. Формула Муавра. Добування кореня n-го степеня.

Практичне заняття 4

Техніка обчислення границі послідовності. Деякі важливі границі.

Практичне заняття 5

Застосування теореми Вейєрштрасса про монотонну послідовність. Число e.

Відшукання $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, $\sup x_n$, $\inf x_n$. Критерій Коші.

Практичне заняття 6

Основні прийоми обчислення границі функції. Визначні границі.

Односторонні границі.

Практичне заняття 7

О-символіка (асимптотичні символи $O, o, O^*, \sim$). Виділення головної степеневої частини функції. Застосування еквівалентних функцій до обчислення границь.

Практичне заняття 8

Дослідження функції на неперервність. Дослідження функції на рівномірну неперервність за означенням і за теоремою Кантора.

Практичне заняття 9

Контрольна робота № 1.

Змістовий модуль 2. **Диференціальне числення ФСА**

Практичне заняття 10

Техніка диференціювання (параметрично заданої, оберненої та неявно заданої функцій).

Практичне заняття 11

Диференціал функції. Застосування диференціала для наближених обчислень.

Практичне заняття 12

Похідні і диференціали вищих порядків. П'ять основних формул для вищих похідних. Формула Лейбніца.

Практичне заняття 13

Теореми про середнє (Ролля, Лагранжа, Коші). Правила Лопіталя.

Практичне заняття 14

Застосування локальної формули Тейлора (із залишковим членом у формі Пеано) до обчислення границь та виділення головної степеневої частини функції. Застосування формули Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

Практичне заняття 15

Дослідження функції на монотонність і локальні екстремуми. Дослідження функції на опуклість і точки перегину. Відшукання прямолінійних асимптот графіка функції. Відшукання найбільшого і найменшого значень функції.

Повне дослідження функції та побудова її графіка.

Практичне заняття 16

Контрольна робота № 2.

Змістовий модуль 3. **Інтегральне числення ФСА**

Практичне заняття 17

Основні методи невизначеного інтегрування: розкладу, заміни змінної, частинами.

Практичне заняття 18

Інтегрування раціональних функцій. Метод Остроградського.

Практичне заняття 19

Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Підстановки Чебишова та Ейлера. Інші прийоми інтегрування квадратичних ірраціональностей.

Практичне заняття 20

Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування трансцендентних функцій.

Практичне заняття 21

Обчислення визначеного інтеграла: формула заміни змінної, формула інтегрування частинами, формула Ньютона–Лейбніца.

Практичне заняття 22

Застосування визначеного інтеграла в геометричних задачах (довжина кривої, площа плоскої фігури, об'єм тіла обертання, площа поверхні).

Застосування визначеного інтеграла у фізичних задачах.

Практичне заняття 23

Контрольна робота № 3.

Змістовий модуль 4. **Диференціальне числення ФВА**

Практичне заняття 24

Обчислення кратних і повторних границь ФВА. Дослідження ФВА на неперервність і рівномірну неперервність.

Практичне заняття 25

Обчислення частинних похідних 1-го і вищих порядків. Дослідження ФВА на диференційовність. Техніка диференціювання.

Практичне заняття 26

Обчислення частинних похідних і диференціалів 1-го порядку складних ФВА. Обчислення частинних похідних і диференціалів вищих порядків складних ФВА.

Практичне заняття 27

Обчислення частинних похідних і диференціалів 1-го порядку неявно заданих ФВА. Обчислення частинних похідних і диференціалів вищих порядків неявно заданих ФВА.

Практичне заняття 28

Заміна змінних у диференціальних виразах зі звичайними похідними.

Заміна змінних у диференціальних виразах із частинними похідними.

Локальна формула Тейлора для ФВА. Формула Тейлора для ФВА із залишковим членом у формі Лагранжа.

Практичне заняття 29

Відшукання внутрішніх локальних екстремумів ФВА. Дослідження на внутрішні локальні екстремуми неявно заданих ФВА.

Методи виключення і невизначених множників Лагранжа для відшукання внутрішніх локальних умовних екстремумів ФВА. Обчислення найбільшого і найменшого значення ФВА на компакті.

Практичне заняття 30

Контрольна робота № 4.

Семестр 2

Змістовий модуль 5. **Інтегральне числення ФВА**

Практичне заняття 1

Обчислення подвійних інтегралів зведенням до повторних. Зміна порядку інтегрування. Заміна змінних у подвійному інтегралі; перехід до ПСК.

Практичне заняття 2

Застосування подвійних інтегралів для обчислення площ плоских фігур. Обчислення площ поверхонь.

Практичне заняття 3

Обчислення потрійних інтегралів зведенням до повторних. Зміна порядку інтегрування.

Практичне заняття 4

Заміна змінних у потрійному інтеграл інтегралі. Перехід до ЦСК і ССК.

Практичне заняття 5

Застосування потрійних інтегралів до обчислення об’ємів. Обчислення мас, статичних моментів і моментів інерції просторових тіл.

Практичне заняття 6

Невласні кратні інтеграли

Практичне заняття 7

Контрольна робота № 5.

Змістовий модуль 6. **Інтеграли на многовидах. Елементи математичної теорії поля**

Практичне заняття 8

Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду. Обчислення мас, статичних моментів і моментів інерції кривих.

Практичне заняття 9

Обчислення поверхневих інтегралів 1-го роду. Обчислення мас, статичних моментів і моментів інерції поверхонь.

Практичне заняття 10

Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду. Обчислення роботи і циркуляції вектора.

Обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду. Обчислення потоку вектора.

Практичне заняття 11

Формула Гріна. Інтегрування повних диференціалів. Відновлення функції за її повним диференціалом. Обчислення площ за до допомогою криволінійних інтегралів.

Практичне заняття 12

Формула Гаусса–Остроградського. Обчислення об’ємів за допомогою поверхневих інтегралів. Формула Стокса. Обчислення циркуляції за допомогою поверхневих інтегралів.

Практичне заняття 13, 14

Знаходження ліній рівня, поверхонь рівня і векторних ліній скалярного поля. Обчислення градієнта і похідної в напрямі вектора. Властивості диференціального оператора grad.

Обчислення потоку і циркуляції векторного поля. Властивості диференціальних операторів div і rot. Дослідження векторного поля на потенціальність та відшукання його потенціалу. Дослідження векторного поля на соленоїдальність та відшукання його векторного потенціалу.

Диференціальні операції 2-го порядку в теорії поля. Диференціальний оператор Лапласа $\Delta := \nabla^2$. Дослідження векторного поля на гармонічність. Операції теорії поля в ОКСК*.

Практичне заняття 15

Контрольна робота № 6.

Змістовий модуль 7. **Числові ряди. Сімейства функцій і ряди функцій**

Практичне заняття 16

Обчислення суми числового ряду за означенням. Дослідження ряду на збіжність за критерієм Коші. Ознаки збіжності знакосталого ряду.

Практичне заняття 17

Застосування ознак Лейбніца, Діріхле та Абеля. Дослідження числових рядів на абсолютну та умовну збіжність

Практичне заняття 18

Дослідження сім'ї функцій на точкову та рівномірну збіжність. Дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність.

Практичне заняття 19

Радіус збіжності і проміжок збіжності степеневого ряду. Розклад функції в ряд Тейлора

Практичне заняття 20

Контрольна робота № 7

Змістовий модуль 8. **Інтеграли, залежні від параметра**

Практичне заняття 21

Правило Лейбніца диференціювання власного інтеграла, залежного від параметра. Обчислення власних інтегралів, залежних від параметра.

Практичне заняття 22

Обчислення невласних інтегралів. Дослідження на збіжність невласних інтегралів у випадку знакосталої функції. Дослідження невласних інтегралів на абсолютну та умовну збіжність. Обчислення головного значення (в розумінні Коші) невласного інтеграла.

Практичне заняття 23

Дослідження невласного інтеграла на рівномірну збіжність по параметру

Практичне заняття 24

Обчислення невласних інтегралів, залежних від параметра. Класичні невласні інтеграли

Практичне заняття 25

Ейлерові інтеграли

Практичне заняття 26

Контрольна робота № 8

Змістовий модуль 9. **Аналіз Фур'є**

Практичне заняття 27, 28

Розклад функцій в дійсний тригонометричний ряд Фур'є (ТРФ). Розклад функцій у комплексний ТРФ. Почленне інтегрування і почленне диференціювання ТРФ. Підсумовування тригонометричних рядів

Практичне заняття 29

Інтегральна формула Фур'є в дійсній і комплексній формах. Відшукання фур'є-образів. Застосування перетворення Фур'є.

Практичне заняття 30

Контрольна робота № 9

10. ЛІТЕРАТУРА

Основні джерела

1. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз, ч. 1 . – К.: Вища школа, 1992. – 495 с.

2. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз, ч. 2 . – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз, ч. 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
4. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз, ч. 2. – К.: Либідь, 1994. – 302 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 2. – М.: Высшая школа, 1988. – 576 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 3. – М.: Высшая школа, 1988. – 352 с.
8. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
9. Зорич В. А. Математический анализ, ч. II. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
10. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 524 с.
11. Кривошея С. А., Майко Н. В., Моторна О. В., Прощенко Т. М. Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи студентів. Частина 1: Навчально-методичний посібник. – К: ВПЦ "Київський університет", 2013. – 324 с. (Гриф МОН України, лист 1/11-4092 від 24.03.2014).
12. Кривошея С. А., Майко Н. В., Моторна О. В., Прощенко Т. М. Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи студентів. Частина 2: Навчально-методичний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 350 с.
13. Кривошея С. А., Майко Н. В., Моторна О. В., Прощенко Т. М. Елементи векторного аналізу: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2018. – 264 с.
14. Кривошея С. А., Майко Н. В. Математичний аналіз. Неперервність, похідна, інтеграл: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 271 с.
15. Веб-сторінка з дисципліни: http://labs.journ.univ.kiev.ua/math

Додаткові джерела

16. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу (введение в анализ, производная, интеграл). – К.: Вища школа, 1984. – 456 с.
17. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу (ряды, функции векторного аргумента, кратные и криволинейные интегралы). – К.: Вища школа, 1986. – 567 с.
18. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
19. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 1. – М.: Наука, 1982. – 616 с.
20. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 2. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. – М.: Физматлит, 2006. – 680 с.
22. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. – М.: Физматлит, 2006. – 864 с.
23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. – М.: Физматлит, 2006. – 729 с.

24. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, ч. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 660 с.
25. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, ч. 2. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
26. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 416 с.
27. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. – Изд-во МГУ, 1991. – 352 с.
28. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость). – М.: Наука, 1984. – 592 с.
29. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). – М.: Наука, 1986. – 528 с.
30. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
31. Придатченко Ю. В., Головач Г. П., Майко Н. В. Деякі спеціальні інтеграли. – К.: ВПЦ КУ, 2004. – 37 с.